معماهایی برای رازگشایی از عالم

کامران وفا

ترجمهٔ
حسام‌الدین ارفعی

فرهنگ‌نشرنو
با حمایت انجمن فیزیک ایران
تهران- ۱۴۰۰

فهرست

	مقدمهٔ مترجم	۱۱
	پیشگفتار	۱۵
۱	**درآمدی بر فیزیک نوین**	**۲۱**
	اندیشه‌های باستانی	۲۳
	مکانیک نیوتنی	۲۶
	مکانیک لاگرانژی و همیلتونی	۲۶
	الکترومغناطیس ماکسول	۲۸
	نظریهٔ نسبیت	۳۱
	مکانیک کوانتومی	۳۴
	نظریهٔ میدان‌های کوانتومی	۳۸
	گرانش کوانتومی	۳۹
۲	**تقارن و قوانین بقاء**	**۴۳**
	معماهای انگیزشی	۴۴
	تقارن	۴۷
	قضیهٔ نوتر	۵۱
	ابرتقارن	۶۱
	شبه‌بلورها و تقارن	۶۳
	ریسمان‌ها و بقاءِ بار	۶۶
	شکست خودبه‌خود تقارن	۶۹

۳ **شکست تقارن** **۷۱**
حرکت زمین و شکست تقارن ۷۳
شکست خودبه‌خود تقارن ۷۵
شکست خودبه‌خود تقارن و آهنرباها ۷۹
معمای مربع ۸۲
شکست تقارن و بوزون هیگز ۸۶
وحدت بزرگ نیروها ۸۹
ابررسانایی ۹۱
تصلب ۹۲
دست‌سانی ۹۳

۴ **قدرت ریاضیات ساده و انتزاعی** **۹۷**
قانون‌ها در مقابل قیدها ۹۷
مقدمه‌ای بر اعداد مختلط ۱۰۰
قضیهٔ اصلی جبر ۱۰۱
عدسی‌های گرانشی ۱۰۹

۵ **ریاضیات پادشهودی** **۱۱۵**
مقدمات ۱۱۵
پارادوکس‌های بی‌نهایت ۱۲۱
مسألهٔ مهمانخانهٔ هیلبرت ۱۲۳
سری‌های تحلیلی ۱۲۶
پارادوکس مونتی هال ۱۳۲

۶ **شهود فیزیکی** **۱۴۱**
فیزیک شهودی ۱۴۱
گالیلئو گالیلئی (گالیله) ۱۴۲
اسحاق نیوتن ۱۴۴
شهود فیزیکی در ریاضیات ۱۴۶
خط بهترین برازش ۱۴۸
«یافتم» ارشمیدس ۱۵۳
قضیهٔ فیثاغورس ۱۵۵

نظریهٔ نسبیت خاص ۱۵۷
مکانیک آماری ۱۵۹

۷ **فیزیک پادشهودی** **۱۶۷**
بازدیدار غوطه‌وری ۱۶۷
هواپیماها ۱۶۹
چرا آسمان شب تیره است؟ ۱۷۱
معادلات ماکسول ۱۷۲
نظریهٔ نسبیت خاص اینشتین ۱۷۲
آزمایشی کلاسیک ۱۷۵
پارادوکس‌های مکانیک کوانتومی ۱۷۵
آزمایش دو شکاف ۱۷۷
تمایزناپذیری در مکانیک کوانتومی ۱۸۰
پارادوکس ئی پی آر ۱۸۱
سیاهچاله‌ها ۱۸۳
هولوگرافی ۱۸۵

۸ **طبیعیت در فیزیک: تحلیل ابعادی** **۱۸۷**
زمانی برای آموختن ۱۸۷
مرتبهٔ بزرگی (قدر) ۱۸۷
تحلیل ابعادی ۱۸۹
تابش از بارهای شتابدار ۱۹۰
مقیاس‌بندی و نظریه‌های میدان همدیس ۱۹۱
یکاهای بنیادی ۱۹۳
سیاهچاله‌ها ۱۹۶
تقارن و طبیعیت ۱۹۸

۹ **ناطبیعیت و اعداد بزرگ** **۲۰۱**
اعداد ناطبیعی ۲۰۱
مسألهٔ چارپایان ارشمیدس ۲۰۴
ظهور مدل خورشیدمرکزی و ناطبیعیت ۲۰۶
نظریهٔ اعداد ۲۰۷

ترکیب عالم ۲۰۸
هندسهٔ فضا ـ زمان ۲۰۹
پرسش‌های دیگر ۲۱۳
مقیاس‌های فاصله ۲۱۳
مقیاس‌های زمان ۲۱۴

۱۰ **دوگانی** **۲۱۷**
دو مثال ریاضی ۲۱۹
دوگانی در مکانیک کوانتومی ۲۲۱
نظریهٔ ماکسول ۲۲۲
دوگانی در نظریهٔ ریسمان ۲۲۵
T ـ دوگانی ۲۲۷
چندگوناهای کلابی ـ یاو و تقارن‌های آینه‌ای ۲۲۹
دوگانی‌های دیگر: هندسه و نیرو ۲۳۴
دوگانی در سیاهچاله‌ها ۲۳۸
هولوگرافی ۲۴۰
قانون نیم‌دایرهٔ ویگنر ۲۴۰

۱۱ **جمع‌بندی** **۲۴۳**
تقارن‌ها و شکست آنها ۲۴۴
تقارن پیمانه‌ای ۲۴۷
ریاضیات شهودی ۲۴۹
ریاضیات پادشهودی ۲۵۱
فیزیک شهودی و ناشهودی ۲۵۳
طبیعیت ۲۵۴
دوگانی ۲۵۵

نمایه ۲۵۷

پیشگفتار

تمایلی ذاتی داریم که بدانیم چیزها چطور کار می‌کنند. امید داریم که در اطراف خود الگوهایی را مشاهده کنیم که ما را در انتظارمان از آنچه در آینده رخ می‌دهد یاری رسانند. کمّی کردن این الگوها فرایندی است که به‌مرور انسان را به ابداع ریاضیات هدایت کرد. از این رو تعجب‌آور نیست که ریاضیات زبان طبیعی توصیف نحوهٔ کارکرد طبیعت باشد. در واقع ریاضیات ستون فقرات فیزیک است که هدفش توصیف نحوهٔ کارکرد جهان در بنیادی‌ترین لایه‌های آن است. هرچه قوانین طبیعت را عمیق‌تر بفهمیم، همان‌قدر به موضوعات پیشرفته‌تری در ریاضیات احتیاج خواهیم داشت به‌حدی که فیزیک امروزه به‌خاطر پیچیدگی ریاضیاتی‌اش، به غیرقابل فهم بودن توسط غیرمتخصصان شهرت یافته است.

اما چنین درکی، سادگی قوانین فیزیک و زیبایی ریاضیات را در دستیابی به جوهر اصلی واقعیت فیزیکی نادیده می‌گیرد. به‌عنوان فیزیکدانی مشتاقِ ریاضیات، به طور مستقیم شاهد این بوده‌ام که چگونه در عمق همهٔ ساختارهای به‌ظاهر پیچیده و دست‌نیافتنی ریاضیات که در تدوین قوانین فیزیک پدیدار می‌شوند، نکته‌هایی ساده و عمیق از حقایق جای گرفته است. این حقایق آن چیزی است که دانشمندان می‌کوشند آنگاه که غبارها فرو نشسته و قوانین فیزیک کشف شده باشد، شفاف سازند. این نکته‌ها

به‌نوعی «چکیده اجرایی»اند که دانشمندان به‌عنوان درس‌هایی که از کشف قوانین طبیعت بر گرفته‌اند، عزیز می‌دارند.

خوشبختانه، غالباً این تفکراتِ محوری را می‌توان با معماهای سادهٔ ریاضی روشن ساخت. به اندازه‌ای ساده که برای پرداختن به آنها و درک معنایشان نیازی به پیش‌زمینهٔ وسیعی در فیزیک یا ریاضیات نیست. کار کردن روی معماهایی ریاضی از این دست نه فقط فرح‌بخش است، بلکه عمیقاً رضایت‌بخش نیز هست، زیرا آنها وراءِ معما بودنشان، معانی عمیق‌تری از واقعیت فیزیکی را در بر دارند. هدف من در این کتاب این است که خواننده را به سفری ببرم تا از طریق معماهای فرح‌بخش پرده از جنبه‌هایی از قوانین جهان بردارم.

نغمهٔ غالب در این کتاب، این نظر است که در زیر واقعیت فیزیکی یک اندیشهٔ فراگیر واحد جای نگرفته است بلکه مجموعه‌ای از آراء تقریباً مخالف است که با هم واقعیت فیزیکی را می‌سازند. هدف اصلی این کتاب درکی است از این که چگونه این مفاهیم متقابل می‌توانند در هم تنیده شوند و هماهنگ با هم در راه غایتی ارزشمند به‌کار آیند. امیدوارم که با مشاهدهٔ برخی از مهم‌ترین اصول کشف‌شده دربارهٔ طبیعت از پشت منشور معماها، این افکار را نشان دهم.

پس از بازنگاهی مختصر به تاریخ علم و تأثیرات متقابل ریاضیات و فیزیک در طی قرون، یک به یک به موضوعات اصلی می‌پردازم. هر بخش با مطلبی یا اندیشه‌ای دربارهٔ یک موضوع آغاز می‌شود و پس از آن به بحثی در اهمیت اندیشهٔ مخالف آن می‌پردازیم، و سپس، همان کار با جابه‌جا کردن موضوع بین فیزیک و ریاضی تکرار می‌شود. همهٔ اینها، در پس‌زمینهٔ معماهایی فرح‌بخش عرضه می‌شود.

اولین موضوع تقارن است. از سویی، اهمیت حفظ تقارن را هم در ریاضیات و هم در فیزیک خواهیم دید، و از سویی دیگر اهمیت شکست تقارن‌ها را. معمای طراحی کوتاه‌ترین بزرگراه بین چهار شهر در چهارگوشهٔ یک مربع، مثال زیبایی از این پدیده است. در حالی که تقارن‌ها نحوهٔ کارکرد

قوانین بقاء مثل قانون بقاء، وجود انرژی را روشن می‌کنند، می‌بینیم که چرا شکست تقارن‌ها برای صِرف وجود ما، از آن هم مهم‌ترند. آن‌طور که بحث خواهیم کرد این موضوع مربوط به ذرّهٔ هیگز است که اخیراً کشف شد. همین‌طور توضیح خواهم داد که چگونه چشمان ما و جایشان در چهرهٔ ما نشانی از شکست تقارن‌ها است. دربارهٔ اهمیت آراء شهودی و همچنین ناشهودی هم در فیزیک و هم در ریاضی نیز بحث می‌کنیم. آراء شهودی (همچون پیوستگی که در جنبه‌های گوناگون قوانین فیزیک نقشی برجسته دارد) و برخی تجریدات ناشهودی، (همچون تصور زمان به‌عنوان بعدی اضافه) برای درک عمیق‌تر واقعیت لازم‌اند. نشان می‌دهیم که مفهوم پیوستگی، با تمام سادگی، به نتایج محکم‌تری می‌انجامد. یکی از مثال‌هایش آن معمایی است که چرایی وجود دو نقطهٔ متقاطر روی استوا با دمای یکسان را آشکار می‌کند. همچنین نشان می‌دهیم که چگونه پیوستگیِ قوانینِ فیزیک می‌تواند توضیح بدهد که چرا نظریهٔ نسبیتِ عامِ آلبرت اینشتین پیش‌بینی می‌کند که همیشه تعدادِ فردی از تصویرهای گرانشیِ ستاره‌ها داریم. سپس به اندیشهٔ طبیعی بودن می‌پردازیم: اینکه چطور با اطلاعاتی بس اندک، تخمین‌هایی تقریبی از نحوهٔ کارکرد طبیعت به‌دست آوریم. به‌عنوان مثال با تخمینی ساده نشان می‌دهیم که خورشید را چقدر باید فشرده کنیم تا تبدیل به سیاهچاله شود. بعد به اندیشهٔ مقابل آن می‌پردازیم و بحث می‌کنیم که چطور سروکلهٔ اعدادی با بزرگی یا کوچکی غیرطبیعی در قوانین بنیادی طبیعت ظاهر می‌شود که پیش‌بینی‌شان دور از انتظار است. به‌ویژه اینکه چرا نیروی گرانش بین پروتون‌ها تریلیون تریلیون تریلیون مرتبه از دافعهٔ الکتریکی بین آنها کوچک‌تر است؟ امکان ظهور اعدادی با بزرگی دور از انتظار را در فیزیک توسط مسألهٔ قدیمی چارپایان ارشمیدس روشن می‌کنیم که پاسخش شامل عددی است با حدود یک میلیون رقم! در آخر دربارهٔ هیجان‌انگیزترین تحولات امروزی فیزیک بنیادی در چارچوب نظریهٔ ریسمان می‌پردازیم. اخیراً نظریهٔ ریسمان به‌عنوان یک نظریهٔ کوانتومی یکسان و در بر گیرندهٔ تمام نیروهای بنیادی مطرح شده است. بر مفهوم دوگانی در نظریه ریسمان

تمرکز می‌کنیم که در دو دههٔ گذشته، نظریه‌پردازان ریسمان را مجذوب کرده و در قوام گرفتن آن نقشی کلیدی بازی نموده است. در این باره صحبت می‌کنم که مثلاً چگونه دوگانی به درک بهتری از سیاهچاله و ماهیت فضا ـ زمان انجامیده است. معمایی که دوگانی را روشن می‌کند، مسألهٔ مورچه‌های برخوردکننده روی خط‌کش است که در آن هدف هر مورچه نیفتادن از لبه‌های خط‌کش تا حد امکان است. در نهایت، دوگانیی که در نظریهٔ ریسمان کشف شده است ریزجهان این کتاب است: این اندیشه که چطور اصول متقابل می‌توانند در هماهنگی کامل و به شکلی سازگار و قدرتمند رفتار طبیعت را پیش‌بینی کنند. هیچ چیز مؤثرتر از این نیست که افکار متقابل هماهنگ با هم کار کنند و این دلیلی است که چرا دوگانی بدل به ابزاری بس قدرتمند در آشکار کردن عمیق‌ترین اسرار جهان ما شده است.

امیدوارم خواندن این کتاب و سروکله زدن با معماهای آن برایتان جذاب و آموزنده باشد. خیلی خوشحال خواهم شد اگر درک تازه‌ای پیدا کنید از قوانین بنیادی عالممان و اینکه چطور ریاضیات در آن جای می‌گیرد، و همزمان به ارزش توان معماها برای به چالش کشیدن و آگاه کردن و گهگاه شگفت‌زده کردن‌مان. حتی اگر از کودکی از دوستداران معما ـ آن‌سان که من بودم و هنوز هم هستم ـ نبوده‌اید هیچ وقت برای علاقه به آن دیر نیست!

من این خوشبختی را داشته‌ام که تعدادی از دانشجویان سال اول کالج هاروارد را در این سفر اکتشافی که معماها چگونه اسرار عالم را آشکار می‌سازند، از طریق سمیناری که به این منظور برای آن طراحی کردم، به همراه خود ببرم. این کتاب حاصل این درس است، که به‌وسیلهٔ بازخوردها و پیشنهادهای دانشجویانی که در آن شرکت کردند، غنی شده است. در آغاز این کتاب مبتنی بود بر یادداشت‌های سه دانشجو ـ تونی فنگ (Tony Feng)، کِوِی لی (Kewei Li) و وایمینگ ژائو (Weiming Zhao) که توسط استیو نادیس (Steve Nadis) ویرایش اساسی شد. برخی از تصویرها را شیائوتیان یین (Xiaotian Yin) به آن افزود. در تکمیل این

کتاب از تشجیع تعدادی از همکاران و بالاخص یائوتیان فو (Yaotian Fu) و برایان گرین (Brian Greene) بهره بردم. عمیقاً قدردان همهٔ آنها هستم.

مطمئن هستم این کتاب از بسیاری جهات جای بهتر شدن دارد. اگر خواننده پیشنهادی داشته باشد، خوشحال می‌شوم آن را از طریق وبگاهم <www.cumrunvafa.org> دریافت کنم.

آخر از همه ولی نه کم‌ارج‌تر از همه، این پیشنهاد همسرم آفرین بود که باعث شد به ابداع این درس و نوشتن این کتاب بپردازم. بدون شوق و اشتیاق او به این پروژه، این کتاب وجود نمی‌داشت. عمیقاً سپاسگزار او هستم.

۱

درآمدی بر فیزیک نوین

بسیاری از جنبه‌های بنیادین فیزیک شالوده‌های ریاضیِ ساده‌ای دارند که ممکن است در پیچیدگی صوری‌شان پنهان شده باشند ـ یعنی هم در زبانی ناآشنا و هم در معادلات مرعوب‌کننده‌شان. همین در مورد بسیاری از ایده‌های مجرد ریاضی نیز صادق است که اغلب شامل مفاهیمی ساده‌اند و می‌توانند به خاطر محیطی که در آن ارائه می‌شوند مبهم جلوه کنند. افکار عمیق در فیزیک و ریاضیات غالباً هستهٔ مشترکی دارند، که با توجه به نزدیکی این دو رشته شاید تعجب‌آور نباشد. شگفت‌تر، این واقعیت است که بعضی از همان افکار می‌توانند از دل حل معماهای ریاضی برآیند.

این کتاب دربارهٔ معماها و رابطهٔ آنها با فیزیک و ریاضیات است. در حالی که معماها به خودی خود می‌توانند مسحورکننده و سرگرم‌کننده باشند، خواهیم دید که چگونه قادراند به‌عنوان پلی بین این دو رشته عمل کنند و برخی از پیوندهای مشترک آنها را آشکار سازند. نه نیازی به دانش پیشرفتهٔ ریاضی و فیزیک برای حل معماهایی که در این کتاب ارائه شده است داریم و نه فرض می‌کنیم خواننده پیشینهٔ عمیقی در هریک از این حیطه‌ها دارد. اما با توجه به اینکه در میان مخاطبان مورد نظر، دانشجوی دانشگاه و دانش‌آموز پیشرفته دبیرستان هم هستند، علاقه‌ای جدی و همچنین کمی آموزش در این حیطه‌ها، مطمئناً در درک این کتاب مفید خواهد بود.

هرچند ریاضیات و فیزیک سخت در هم آمیخته‌اند، فرهنگ‌ها و فلسفه‌های متفاوتی دارند. ریاضیات با به کار گرفتن استنتاج‌های منطقی کارِ ساخت را از اصول موضوع بنیادین آغاز می‌کند. قوانین فیزیک به جای آنکه به طور منطقی و در روشی سلسله‌مراتبی استنتاج شده باشند، برای آن وضع شده‌اند که توضیح دهند چگونه بخش‌های مختلف طبیعت کار می‌کنند و چگونه با یکدیگر جفت و جور می‌شوند. فیزیک بر رابطهٔ بین این قوانین تأکید دارد و نه بر وابستگی‌های منطقی بین آنها. البته هنوز، انسجام منطقی این افکار عنصر لازمی از قوانین فیزیکی است. در ریاضیات، مهم این است که در مورد اصول موضوع و فرض‌ها شفاف باشیم. از سویی دیگر چنان که بعداً خواهیم دید، اصول موضوع، یا اصول بنیادی فیزیک ممکن است با بروز شواهد و افکار نظری جدید تغییر کنند.

تاریخ نشان می‌دهد که پیشرفت مهم در این زمینه زمانی رخ می‌دهد که چیزی که در ابتدا نتیجهٔ قانون فیزیکی تلقی می‌شد بعداً مستقلاً به‌عنوان اصلی راهنما تعیین شود. از این رو یک فیزیکدان ماهر، باید همیشه برای بازنگری یا پس و پیش کردن‌هایی از این نوع ذهنی باز داشته باشد زیرا اصل نوشناخته اغلب نسبت به اصولی که در آغاز به نظر می‌رسید از آنها سرچشمه گرفته بنیادی‌تر از آب در خواهد آمد، و حیطهٔ وسیع‌تری از کاربرد خواهد داشت. اصل پایستگی تکانه[1] مثال خوبی است. هرچند نخست به‌عنوان نتیجه‌ای از قوانین حرکت نیوتن دیده می‌شد اما بعداً ــ بیش از ۲۲۵ سال پس از ارائهٔ قوانین نیوتن در اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی (پرینکیپیا متمتیکا[2]) معلوم شد که قوانین بقاء بنیادی‌تر از قوانین حرکت‌اند زیرا از تقارن‌های زیربنایی در طبیعت ناشی می‌شوند.

به این دلیل است که فیزیکدانان می‌کوشند نگرش انعطاف‌پذیرتری را در مورد آنچه اصول بنیادی هستند و دائماً تحول می‌یابند، حفظ کنند. به جای قائل شدن ارزشِ زیادی به ذات سلسله‌مراتبی افکار، فیزیکدان‌ها مایلند که

1. conservation of momentum
2. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*

هر لحظه ساختار را بازچینی کنند، که در تباین با نحوه‌ای است که غالباً ریاضیدانان به ریاضیات می‌نگرند. یک قضیهٔ ریاضی، اگر درستی آن اثبات شود الی‌الابد صحیح تلقی می‌شود ـ بر خلاف اصول فیزیکی که با پیش آمدن یافته‌های جدید تجربی، در معرض تغییراند.

تفاوت‌های دیگری هم هست. مثلاً، توصیف پدیده‌های پیچیده در فیزیک غالباً مستلزم انواعی از تقریب است که امکان دارد ریاضیدانان از انجام آن منزجر باشند. مثلاً این پرسش که آیا فضایی «پیوسته» است و شامل هیچ گسستگی نیست، یا اینکه از نقاط منفصلِ نزدیک به هم ساخته شده است برای فیزیکدانی که بر نتیجهٔ آزمایش‌هایی در مورد فواصل به مراتب بزرگ‌تر تمرکز دارد ممکن است هیچ اهمیتی نداشته باشد. از سوی دیگر، برای ریاضیدانان هموار بودن یا نبودن فضایی مفروض یک ویژگی کلیدی است، نه یک دلمشغولی بی‌اهمیت.

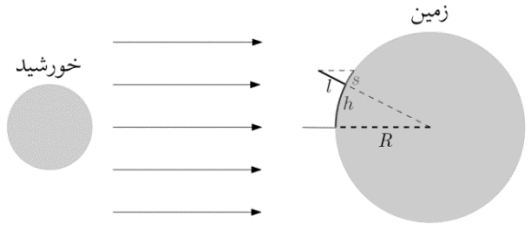
هدف این بخش، فراهم آوردن منظری فراگیر از چشم‌انداز فیزیک است. این مروری سریع است با ارائه‌ای سبک؛ در اینجا هدف جامع بودن نیست، که آن هم اصولاً در طی یک بخش غیرممکن است. در عوض قصد داریم به چند مثال از تاریخ فیزیک اشاره کنیم که درکی از جایگاه امروزمان در تلاش درازمدت خود برای فهم قوانین بنیادی طبیعت به دست می‌دهد.

اندیشه‌های باستانی

یونانی‌ها در کوششان برای توضیح آنچه در دنیای اطرافشان می‌گذشت افکار جالبی دربارهٔ فیزیک داشتند. آنها شیفتهٔ ریاضیات زیبا بودند، و بعضی از دانشمندان، از جمله افلاطون، معتقد بودند که حقیقت این جهان در هندسه نهفته است. آنها زیبایی را در هندسهٔ اقلیدسی و اجسام افلاطونی[1] می‌دیدند، که گمان می‌کردند می‌شود برای توصیف طبیعت به‌عنوان یک کل یکپارچه به کار گرفت. در حالی که در مورد ریاضیات سال‌ها از زمان جلوتر بودند، فیزیکشان در همان سطح نبود. به‌عنوان

1. Platonic solids

مثال، ارسطو اعتقاد داشت که سنگ‌ها سقوط می‌کنند چون دوست دارند روی زمین باشند. او تصریح می‌کرد که در میان تمام حالت‌های ممکن، بودن روی زمین آن حالتی است که سنگ بیش از حالات دیگر خوش می‌داشت. او این‌طور ادامه می‌داد که در نتیجه سنگ‌ها وقتی به زمین نزدیک‌تر شوند سریع‌تر می‌افتند زیرا از اینکه به مکان طبیعی و نقطهٔ مرجّح آرامششان نزدیک‌تراند، شادان‌تر هستند.[۱]



شکل ۱. محیط زمین توسط اراتوستنس کورنه‌ای[۲] در حدود ۲۳۰ پیش از میلاد اندازه‌گیری شد.

علیرغم توصیفات نارسای یونانی‌ها از پدیده‌های فیزیکی، شوق اساسی آنها برای توصیف جهان با ریاضیات زیبا هنوز هم برای علم حیاتی است. بعضی از افکارشان، مانند مفهوم تشکیل مادّه از اتم‌های منفرد (که از جمله توسط لئوکیپوس[۳] و ذیمقراطیس (دموکریت) ارائه شده بود) تا امروز دقیق باقی مانده است. نه تنها معتقد بودند که زمین کروی است، بلکه زمانی حوالی ۲۳۰ پیش از میلاد محیط آن را هم اندازه گرفتند، به‌ویژه اراتوستنس تفکرات سادهٔ مثلثات را، همراه با مشاهدهٔ تغییرات طول سایه نسبت به فاصله از استوا را برای اندازه‌گیری شعاع زمین به کار گرفت. جوابی که به دست آورد چندان دور از واقع نبود ــ در حدود 15% طول واقعی شعاع زمین که امروز اندازه‌گیری شده است. او این فکر اساسی را به کار گرفت که وقتی به اندازهٔ h از استوا بالا برویم طول سایهٔ میله‌ای به اندازهٔ l در هنگام

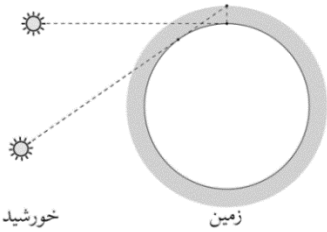
۱. بنگرید به در آسمان اثر ارسطو.

2. Eratosthenes of Cyrene 3. Leucippus

ظهر از 0 (صفر) به s می‌رسد (بنگرید به شکل ۱). آنگاه با استفاده از مثلثات ساده می‌توان نتیجه گرفت که شعاع زمین R عبارت است از

$$R \sim h \times \frac{l}{s}$$

فکر کاربرد مفاهیم هندسهٔ محض برای استنتاج واقعیت‌های جالب دربارهٔ طبیعت گذشته‌ای طولانی از دوران ریاضیدانان یونانی تا به امروز را طی کرده است. در حدود سال ۱۰۰۰ پس از میلاد ابن معاذ (ابو عبدالله محمد ابن معاذ الجیانی؛ ۳۷۸–۴۷۱ ق.) و ابن هیثم (ابوعلی محمد بن هیثم بصری؛ ۳۵۴–۴۳۰ ق.) ارتفاع اتمسفر را 84 کیلومتر (52 میل) یعنی در محدودهٔ 20% مقدار پذیرفته‌شدهٔ امروزی به دست آوردند.[۱] معاذ و برخی دیگر دانشمندان مسلمان از زاویهٔ نشیب خورشید به هنگام گرگ و میش و توابع ساده مثلثاتی برای این محاسبه بهره جستند. رویکردشان نسبتاً آسان بود: او چنین استدلال کرد که علت اینکه آسمان بلافاصله پس از غروب تار نمی‌شود باید این باشد که قسمت‌های بالایی آتمسفر مدتی حتی پس از غروب نور خورشید را دریافت می‌کنند (بنگرید به شکل ۲). با اندازه‌گیری طول زمانی (t) که نور خورشید محو می‌شود، در حدود 2 ساعت، به‌عنوان کسری از طول شبانه‌روز معاذ ارتفاع آتمسفر، h را به‌صورت کسری از شعاع زمین $\frac{1}{2}(\frac{2\pi t}{24})^2 \sim \frac{h}{R}$ به دست آورد.



شکل ۲. کل ارتفاع آتمسفر توسط ابن‌معاذ و ابن‌هیثم در قرن‌های ۱۱ و ۱۲ پس از میلاد اندازه‌گیری شد.

۱. بنگرید به:
<https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02464977>

اما کاربرد عمیق ریاضیات در فیزیک باید منتظر زمان‌های متأخرتر، و کار سر اسحاق نیوتن[1] در میانه تا اواخر سال‌های ۱۶۰۰ می‌ماند که نقطهٔ آغاز واقعی در این ارتباط است.

مکانیک نیوتنی

بلاشک نیوتن یکی از پیشگامان بزرگ فیزیک نوین است. قانون دوم حرکت او، در یکی از مشهورترین معادلات فیزیک، که رابطهٔ دیفرانسیلی بین مکان و نیرو است فشرده شده است.

$$a := \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}$$

در حالی که F و m کمیت‌های فیزیک هستند شتاب a بیشتر کمیتی است ریاضی، که به‌عنوان مشتق دوم مکان نسبت به زمان تعریف شده است. به‌مرور که فیزیک بیشتر کمّی شد، ریاضیات بیشتر و بیشتر با فیزیک درتنید. در واقع نیوتن ناچار شد تمامی رشته‌ای از ریاضیات، یعنی حسابان را اختراع کند تا قانون دومش را به زبان دقیق ریاضی تدوین نماید. این تنها یک مثال از موارد متعددی است که نیاز به بیان قوانین فیزیک منجر به حلول شاخهٔ جدیدی از ریاضیات شده است. در مقابل، ریاضیات نیز به بینش‌های نویی در فیزیک رهنمون شده است. در این کتاب، بسیار بیشتر از این داد و گرفت بین دو رشته را خواهیم دید.

مکانیک لاگرانژی و همیلتونی

تفحص مستمر در پایه‌های ریاضی مکانیک نیوتنی، در حیطه‌های مختلف فیزیکی، به بازنویسی آن همراه با ریاضیاتی نوین منجر شد. مثلاً در اواخر سال‌های ۱۷۰۰، ژوزف لویی لاگرانژ[2] راهی جدید و به اصطلاح «لاگرانژی»[3] برای به چارچوب در آوردن مکانیک نیوتنی پیشنهاد کرد که

1. Sir Isaac Newton 2. Joseph-Louis Lagrange 3. Lagrangian